

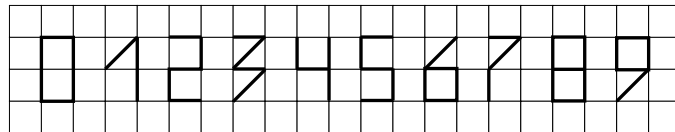
Республиканская олимпиада 6-8 классов. Математика (4 часа).

На каждую задачу требуется привести подробное решение!

Пожалуйста, пишите разборчивее!

1. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2y^2 - 3x^2 - y^2 + 3 = 2019$.

2. Придя на почту и ожидая своей очереди для отправки посылки, Адиса разглядывает образец для заполнения почтового индекса (см. рисунок)



Адиса заметила, что если перевернуть листок с шаблоном, на котором написаны цифры, то 0, 2, 5 и 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, а остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, которые при переворачивании листка не изменяются?

3. Ардан загадал три числа x , y и z такие, что их сумма равна 0. Определите знак выражения $xy + xz + yz$.

4. Дан произвольный треугольник ABC . Из вершины B вне треугольника провели прямые BK и BL , так что $\angle ABK = \angle CBL$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BK , а точка Q симметрична точке C относительно прямой BL . Докажите, что $AQ = PC$.

5. Алина и Цырен играют в следующую игру. Они должны по очереди вычеркивать из фразы буквы. За один ход разрешено вычеркнуть либо только одну букву, либо одну букву и все такие же. Выигрывает тот, кто вычеркнет последнюю букву всей фразы. По жребию первым выпало ходить Алине. Коварство Алины не знает границ, поэтому она придумала такую фразу (для этого ей даже пришлось допустить в ней ошибку), что тот, кто ходит первым, имеет выигрышную стратегию. Вот Алинина фраза: РЕСПУБЛЕКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА. Опишите, каким образом Алина собирается выиграть, вне зависимости от игры Цырена?

6. На квадратной доске 7×7 клеток, каждая клетка окрашена в один из двух цветов (белый или черный). Святослав может перекрасить в красный цвет любую пару соседних по углу или по стороне клеток одного (черного или белого) цвета. Какое наибольшее количество клеток сможет гарантированно перекрасить Святослав вне зависимости от начальной раскраски?

7. В Чудесном лесу, где живет Винни-Пух, у каждого жителя есть компьютер. Все компьютеры Чудесного леса подключены в одну сеть (но не всякая пара компьютеров имеет прямое соединение). Недавно на каждый компьютер сети была установлена программа, которая может отправить на любой другой компьютер сети запрос об отношении к мёду хозяина этого компьютера (вне зависимости от наличия прямого соединения между этими компьютерами).

При первом запуске программы на каждом компьютере получен один и тот же отчет «Среди машин, с которыми у данного компьютера установлено прямое соединение, число машин, принадлежащих тем, кто ненавидит мёд, на одну меньше, чем число машин, чьи владельцы обожают мёд».

При втором запуске – на каждом компьютере получен один и тот же отчет «Среди владельцев тех машин, с которыми у данного компьютера прямого соединения не установлено, обожателей мёда на одного больше, чем мёдоненавистников».

К сожалению, выяснилось, что при первом запуске – программы на компьютерах мёдоненавистников, а при втором запуске – программы на компьютерах обожателей мёда, выдали заведомо неверные отчеты. Считая, что каждый житель Чудесного леса либо любит мёд, либо ненавидит его (и никаких других вариантов!), и что у каждого жителя может быть только один компьютер, ответьте на вопрос, может ли в компьютерной сети Чудесного леса быть ровно 2019 машин?