Республиканская олимпиада 6-8 классов. Математика (4 часа).

На каждую задачу требуется привести подробное решение!

Пожалуйста, пишите разборчивее!

1. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2y^2 - 3x^2 - y^2 + 3 = 2019$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $(a^2 - 1)(b^2 - 3) = 2019 = 1\cdot 2019 = 3\cdot 673$. Поскольку числа 2, 2022, 2020 и 6, 674 не являются полными квадратами, получаем 4 решения; все они получаются из (2, 26) сменой знаков.

Ответ: (2,26), (2,-26), (-2,26), (-2,-26),

Критерии:

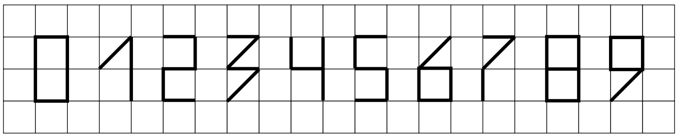
7 баллов – полное решение, 4 ответа;

По 2 балла за каждый вариант ответа;

Снимать по 2 балла за каждый неверный ответ;

Решение подбором – снимать 2 балла.

2. Придя на почту и ожидая своей очереди для отправки посылки, Адиса разглядывает образец для заполнения почтового индекса (см. рисунок)



Адиса заметила, что если перевернуть листок с шаблоном, на котором написаны цифры, то 0, 2, 5 и 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, а остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, которые при переворачивании листка не изменяются?

Решение: Все такие числа должны состоять из цифр, имеющих смысл при переворачивании листа, причём число определяется первыми четырьмя своими цифрами. Заметим, что четвертая цифра не может быть 6 или 9, а также первая цифра не может быть 0.

Итак, для первой цифры имеем 5 вариантов (2, 5, 8, 6, 9), для второй и третьей – по 6 (0, 2, 5, 6, 8, 9), а для четвертой – 4 варианта (0, 2, 5, 8). Таким образом, всего таких чисел $5\cdot 6^2\cdot 4 = 720$.

Ответ: 720 чисел.

Критерии:

7 баллов – обоснованно получен верный ответ;

2 балла – присутствует верная идея решения, но допущена арифметическая ошибка.

3. Ардан загадал три числа x, y и z такие, что их сумма равна 0. Определите знак выражения $xy + xz + yz$.

Решение: $2(\mathrm{ab} + \mathrm{ac} + \mathrm{bc}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 - \mathrm{c}^2 = -\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 - \mathrm{c}^2 \le 0$.

Критерии:

7 баллов – обоснованно получен верный ответ.

За попытку подбирать примеры таких чисел и по ним определять знак – 0 баллов.

За строгое неравенство 3 балла.

4. Дан произвольный треугольник ABC. Из вершины B вне треугольника провели прямые BK и BL, так что $\angle ABK = \angle CBL$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BK, а точка Q симметрична точке C относительно прямой BL. Докажите, что $AQ = PC$.

Решение: Треугольники ABQ и PBC равны, поскольку $AB = PB$, $BQ = BC$ и $\angle ABQ - \angle PBC = \angle CBQ - \angle PBA = 2\angle CBL - 2\angle ABK = 0$. (Необходимо доказательство равенств $AB = PB$, $BQ = BC$).

Критерии:

7 баллов – верное доказательство.

За незначительные недочеты – снимать 1-2 балла в зависимости от серьезности недочета.

В остальных случаях – 0 баллов.

5. Алина и Цырен играют в следующую игру. Они должны по очереди вычеркивать из фразы буквы. За один ход разрешено вычеркнуть либо только одну букву, либо одну букву и все такие же. Выигрывает тот, кто вычеркнет последнюю букву всей фразы. По жребию первым выпало ходить Алине. Коварство Алины не знает границ, поэтому она придумала такую фразу (для этого ей даже пришлось допустить в ней ошибку), что тот, кто ходит первым, имеет выигрышную стратегию. Вот Алинина фраза: РЕСПУБЛЕКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА. Опишите, каким образом Алина собирается выиграть, вне зависимости от игры Цырена?

Решение: Разобьем буквы на группы по числу повторений в фразе:

1 группа: 1 раз – Р, У, Б, Н, Я, О, М, Д = 8 букв

2 группа: 2 раза – Е, П, Л, К, С, И = 6 букв

3 группа: 4 раза – А – 1 буква.

Алине первым ходом нужно вычеркнуть четыре буквы А. Затем, как бы ни ходил Цырен, у Алины есть симметричный ход в той же группе букв.

Критерии:

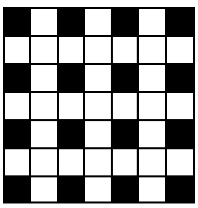
7 баллов – верная стратегия.

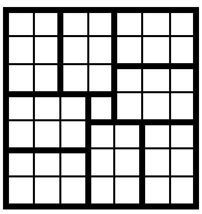
4 балла – идея разбить все буквы на группы по числу повторений, но решение не доведено до конца.

В остальных случаях – 0 баллов.

6. На квадратной доске 7х7 клеток, каждая клетка окрашена в один из двух цветов (белый или черный). Святослав может перекрасить в красный цвет любую пару соседних по углу или по стороне клеток одного (черного или белого) цвета. Какое наибольшее количество клеток сможет гарантированно перекрасить Святослав вне зависимости от начальной раскраски?

Решение. Оценка. При раскладке, указанной на левом рисунке, ни одну из чёрных клеток перекрасить нельзя, а из 33 белых можно перекрасить не больше 32 клеток в силу чётности.





Пример. Покажем, что 32 клетки можно перекрасить при любой раскладке. В трёхклеточном уголке всегда можно перекрасить пару клеток. Значит, в прямоугольнике 2×3 можно перекрасить 4 клетки. В квадрате 7×7 можно разместить 8 таких прямоугольников (рис. справа).

Ответ: 32 клетки.

Критерии:

Только пример – 3 балла, только оценка – 3 балла, только пример или только оценка с ошибками – 1 балл. 7 баллов за оценку+пример без ошибок.

7. В Чудесном лесу, где живет Винни-Пух, у каждого жителя есть компьютер. Все компьютеры Чудесного леса подключены в одну сеть (но не всякая пара компьютеров имеет прямое соединение). Недавно на каждый компьютер сети была установлена программа, которая может отправить на любой другой компьютер сети запрос об отношении к мёду хозяина этого компьютера (вне зависимости от наличия прямого соединения между этими компьютерами).

При первом запуске программы на каждом компьютере получен один и тот же отчет «Среди машин, с которыми у данного компьютера установлено прямое соединение, число машин, принадлежащих тем, кто ненавидит мёд, на одну меньше, чем число машин, чьи владельцы обожают мёд».

При втором запуске – на каждом компьютере получен один и тот же отчет «Среди владельцев тех машин, с которыми у данного компьютера прямого соединения не установлено, обожателей мёда на одного больше, чем мёдоненавистников».

К сожалению, выяснилось, что при первом запуске – программы на компьютерах мёдоненавистников, а при втором запуске – программы на компьютерах обожателей мёда, выдали заведомо неверные отчеты. Считая, что каждый житель Чудесного леса либо любит мёд, либо ненавидит его (и никаких других вариантов!), и что у каждого жителя может быть только один компьютер, ответьте на вопрос, может ли в компьютерной сети Чудесного леса быть ровно 2019 машин?

Решение.

В первом запуске обожатели меда получили верный ответ. Отсюда можно сделать вывод, что каждый компьютер, принадлежащий медообожателю соединен с нечетным количеством других компьютеров.

Во втором запуске компьютер каждого медоненавистника выдал верный отчет. Следовательно, компьютер, принадлежащий некоторому медоненавистнику X, не имеет прямого соединения с нечетным количеством компьютеров. Пусть в Чудесном лесу ровно 2019 компьютеров. Тогда он должен иметь прямое соединение также с нечетным количеством компьютеров.

Таким образом, получаем, что при 2019 компьютерах в Чудесном лесу, каждый компьютер соединен с нечетным количеством других компьютеров.

Согласно известной теореме из теории графов, число вершин нечетной степени в неориентированном графе обязательно четно. Противоречие.

Критерии:

7 баллов при правильных рассуждениях. Засчитывать, как доказательство теоремы, так и просто ссылку на нее.

Простые рассуждения о четности или нечетности – 0 баллов